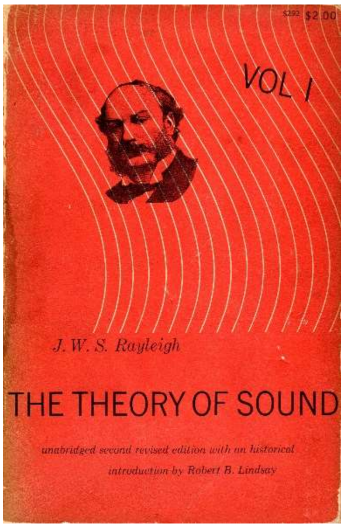
2016年12月3日　第18回耐震工学研究会　青葉山

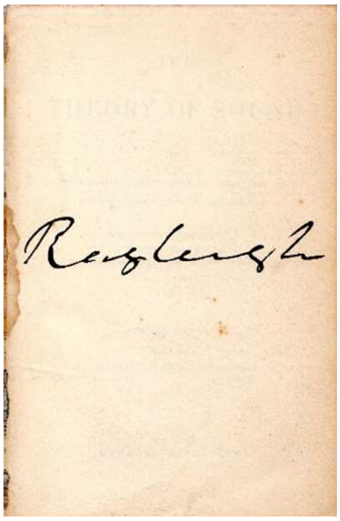
J. W. S. レーリー
－古典動力学の最後の博学者－

柴田　明徳

１．はじめに

私は1960年（昭和35）に学部を卒業して、修士課程に進学した。その年の東大武藤・梅村研究室の修士学生は3人で、洪忠憙さんが応力解析、廣澤雅也さんが鉄筋コンクリート、私は一応振動を専門ということになった。先輩から振動の古典ならレーリーの“The Theory of Sound”だと聞いて、日本橋丸善でDoverの廉価版の洋書上下2冊を生れてはじめて購入した。



The Theory of Sound, First Edition 1877（1945Dover版表紙）

大学院でも一応授業はあり、坪井善勝先生の応用力学では、見たことのない曲面構造の数式が並んだ。その時配られた青焼きのプリントの手書き文字は、本当に見事で美しかった。それが生研大学院生の川股重也さんの手によるものであることは、学生の噂で伝わってきた。川股先生は後に東北工業大学にこられ、仙台で長くご厚誼を頂くことになる。

振動論は梅村魁先生の担当で、彰国社の建築学体系の「建築振動論」がテキストだった。最後に形ばかりの試験があり、その問題が10行位の英訳で、”The Theory of Sound”の一部だった。しめたと思ったことを覚えている。だが、どの部分だったか、いま見直しても思い出せない。その後あまり真面目に読まないまま、年月が過ぎた。最近、暇に任せて”The Theory of Sound”をもう一度眺めてみた。1877年の出版である。明治10年、西南戦争がおこり西郷隆盛が自決した年、また東京帝国大学が発足した年である。米国ではその年にエジソンが蓄音機を発明、前年の1876年にはグラハム・ベルが電話の特許を取っている。音と振動の研究は当時の世界の先端的な関心の一つだったのだろう。

今年の耐震工学研究会では、J. W. S. レーリー（1842～1919）とその前後の時代を出発点として、振動の物理的な研究の発展を眺めてみたいと思う。

２．レーリーの生涯とその時代

“Theory of Sound”（Dover 版、1945）の巻頭には、Robert Bruce Lindsay による”Historical Introduction”があり、レーリーの生涯と業績が概説されている。

また、寺田寅彦の「レーリー卿」（初出は岩波講座「物理学及び化学」、1930 年（昭和 5)、その後寺田寅彦全集に所載）という論考がある[2)]。その内容は、寺田の付記によれば、「ほとんどすべて Robert John Strutt すなわち現在のレーリー卿(注:レーリーの長男で、やはり物理学者）の著書“John William Strutt, Third Baron Rayleigh” から抄録したものである。ここでは彼の科学的な仕事よりはむしろこの特色ある学者の面目と生活とを紹介する方に重きをおいた。」、とある。レーリーの人間性が良く伝わってくる大変優れた評伝であり、一読をお勧めしたい。青空文庫にも入っている。

さらに、ネットで調べてみると、A. T. Humphrey（General Electric Company の主任技術者、GEC は 1886 年創業の英国の会社、米国の GE とは別物）の “Lord Rayleigh – the last of the great Victorian polymaths” という 1992 年の文章を見つけた。92 年はレーリーの生誕 150 年に当たる。先祖代々の屋敷や当時の実験室や装置などの写真もあり、文献なども詳しく、非常に貴重な資料となった。

また日本では、原田義明さん（FEM 関係の技術者のようだ）のホームページに、「理系こぼれ話　第 22 話　専門を持たなかった貴族物理学者」（2014 年）というレーリーについての記事があった。寺田寅彦を引用しながら、よく調べて書いておられる。また、他にも広く理工系分野の話題に関する分かり易く興味深い記事が沢山あり、大変感心した。

ここでは、上記のような諸文献（特に寺田寅彦と Humphrey）および Wikipedia などを参考に、ジョン・ウィリアム・ストラット、3 代レーリー男爵（John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh、1842－1919）の生涯を概略辿ってみたい。イギリスの物理学者でその功績により貴族の称号を得たものは多いが、生まれながらの貴族で優れた科学者になったレーリーの様な例は極めて稀であると言われる。

レーリー家の先祖はエセックス州でもともと粉ひき業を営んでおり、その後ターリングに邸宅や荘園を持つようになった。レーリーの祖父は陸軍大佐で、王党派の国会議員を務め、勲功により爵位を授けられたが、これを辞退したため、爵位（Baroness）は夫人に授けられた（初代女男爵)。その息子、2 代男爵ジョン･ストラットは近くのラングフォードに住み、40 代まで独身だったが、17 歳の女性と結婚した。ジョン・ウィリアム・ストラット・レーリーは、7 人の子供の長子として 1842 年に生まれた。

ターリング　プレイス[3)]（ロンドンの北東約 60km）

寅彦によれば、「三歳になるまで物が云えなかった。しかし物事にはよく気がついて、何でも指さして「アー、アー、アー」と云った。そうして「あれはお家（うち）です」、「犬です」という返事を聞かないうちはなかなか満足しなかった。祖父の大佐がこの子を始めて見たときに「これはよほど利口か、それとも大馬鹿だ」と云った。それはこの児の頭蓋骨の形を見てそう云ったものらしい。」

10 才でイートンに入学するが、疱瘡を患って家に帰り、家庭教師と私塾で勉強して、その才能を伸ばした。14 才の時、ハローに入るが、病気で退学し、西海岸の町トーキーのウォーナー師の所で 4 年勉強した。写真に夢中になり、科学への興味もめばえて色々実験などもした。結構いたずら好きな少年だったらしい。

1861 年にはケンブリッジのトリニティカレッジに入学する。（1546 年創設の学寮、アイザック・ニュートンを始め著名人を多数輩出）そこで、有名な数学教師ラウスから数学の厳しい指導を受け、数学の最高学生賞（Senior Wrangler）を授与された。

若い時のセルフ・ポートレート [3)]

1866 年にはトリニティの特別研究員になった。同僚には、ジョージ・ダーウィン（チャールス・ダーウィンの息子、父親の「種の起源」出版は 1859 年）や後に英国首相になったアーサー・バルフォア（1848～1930）などもいた。バルフォアとは特に長く親交を結んだ。彼には二人の姉イヴリンとエレノアがいた。上のエレノアは後に電気の単位実験などでレーリーを手伝い、下のイヴリンは 1871 年にレーリーと結婚した。

ケンブリッジでのレーリーの研究は大変幅が広く、また今に至るまでその輝かしい価値を失っていない（弾性体力学、音響学，光学、電磁気学など）。論文の数も極めて多く、1869 年から 1920 年までの間に 446 編の論文を書いた。最後の 3 編は 1919 年の彼の死の後で発表された。建築振動や地震工学の勉強をした人は、レーリー減衰、レーリーの商、レーリー波、レーリー分布、レーリー・リッツ法などの言葉を聞いたことがあるだろう。そのほか、流体、電磁波など多くの分野で、レーリーの名を冠した用語がある。高校の物理で「空はなぜ青いか」を学ぶとき、レーリー散乱という言葉が出てくるが、これも有名な業績で、固有振動と関係がある。

レーリーは 1872 年に熱病を患い、病後の冬の寒さを避けるためエジプト旅行に出かけ、1873 年まで 4 か月の間ナイル川での単調な船住まいを続けた。この退屈な時間を利用して、名著 ”Theory of Sound”

の草稿を書いたという。

1873 年父の死去により、第 3 代レーリー男爵となり、家督を継いで父祖の荘園ターリングに移った。そこに実験所をつくり、さまざまな研究を行った。昔からあった「白鳥池」を利用して水力学の実験も行った。

1879 年には、ケンブリッジのキャヴェンディッシュ講座の初代教授マクスウェルの死去により、その 2 代教授となった。レーリーの最初の講義は「物理器械使用法」、次は「湿電気（galvanic electricity）と電磁気」であった。聴講者はただの 16 人で、これは彼の在職中あまり変わらなかったそうである。（ルイジ・ガルヴァ―二、1737～1798、生体電気 1780）（アレッサンドロ・ヴォルタ伯爵、1745～1827、ボルタ電堆（ガルバ二電池 1800)）。

この頃、レーリーはオームやアンペアなどの電気の単位の再測定に関する実験を精力的に行った。夫人の姉エレノアも実験補助者の一人として活躍した。

その頃のレーリーについて寅彦の次のような文章がある。「当時の思い出を書いたシジウィック夫人（レーリー卿夫人の姉エレノア）の記事に拠ると「彼が人々の研究を鼓舞し、また自分の仕事の援助者を得るに成効した所以（ゆえん）は、主に彼の温雅な人柄と、人の仕事に対する同情ある興味とであった」。彼はこの教授としての仕事を充分享楽しているように見えた。」「彼の特徴として、物を観るのに広い見地から全体を概観した。樹を見て森を見遁（みのが）すような心配は決してなかった。」「いつでも大きな方のはしっこ（big end）をつかまえてかかった。」「手製の粗末な器械を愛したのも畢竟（ひっきょう）同じ行き方であった。無用のものは出来るだけなくして骨まで裸にすることを好んだ。」」。

1884 年にレーリーはキャヴェンディッシュ研究所長の職を辞し、ターリングの自邸へ戻る。任期の 5 年間に彼が書いた論文は 60 編余、平均月 1 編という大変な数であった。「あの調子で永くはとても続けられなかった」というのが後年の述懐だったという

ターリングの自宅の実験室で、レーリーは様々なガスの比重測定の研究を行った。酸素と水素の比重を定めた次の仕事は当然窒素の比重を定めることであった。空気から酸素と水素を除いて得たものと科学的な方法で得たものとが一定の比率で異なる値になることを見出し、この結果が稀有元素アルゴンの発見となった。アルゴンの関するラムゼーと共同の論文が出たのは 1895 年である。この研究により、レーリーは 1904 年のノーベル物理学賞を授与された。続いて、ヘリウム、ネオンなど他の稀有元素も発見された。ウィリアム・ラムゼー（1852～1916）も、空気中の希ガスの発見により、1904 年ノーベル化学賞をレーリーと同時に受賞した。

寅彦は、「今日我帝都の夜を飾るネオンサインを見る時に、吾々はレーリー卿の昔の辛苦を偲ぶ義務を感ずるであろう。」と書いている。

1897 年には王立研究所の自然科学教授になる。先任者ティンダルが病気でやめたので、その後を継いだ。主な仕事は毎年復活祭の前の土曜の午後 6 回の講演をするのと、その外に一回金曜の晩専門的な研究結果の講演をするだけであった。

その後も、様々な社会的活動を続けながら、多方面にわたる分野の研究を精力的に続け、1918 年に亡くなるまで、その意欲が衰えることは無かった。

レーリーは、まさに「ヴィクトリア朝の偉大な博学者たち（polymaths）の最後の人」（ハンフリー[3)]）と呼ばれるのにふさわしい。

ターリング自邸内の実験所

図書室でのレーリー

作業場

化学実験室のレーリー（画）

（いずれも文献３）から）

レーリーが一緒に仕事をした同時代人たちに、マクスウェル方程式で古典電磁気学を確立したマクスウェル（James Clerk Maxwell、1831～1879、ケンブリッジ大学教授）や熱力学のケルヴィン卿（ウィリアム・トムソン、William Thomson, 初代 Baron Kelvin 1824～1907、グラスゴー大学教授、熱力学）がいる。この 3 人は互いに認め合う間柄で、いずれもケンブリッジ大学の出身である。

レーリーの活躍した 19 世紀のヴィクトリア時代における諸科学の確立が、20 世紀に工学・技術文明が大きく発展する素地を作ったと言えよう。付言すれば、地震学・地震工学の基礎を作ったロバート・マレット（1810～1881）やジョン・ミルン（1850～1913）も同じヴィクトリア時代の人である[4)]。マレットが調査したナポリ大地震は 1857 年、ミルンが調査した濃尾地震は 1891 年で、いずれも 19 世紀後半である。2013 年はミルンの没後 100 年、各地で記念行事が行われた。3 年後の 2019 年はレーリーの没後 100 年である。

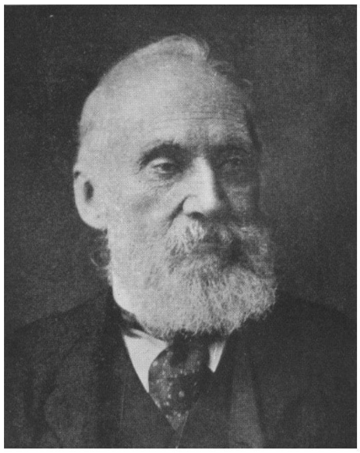
寺田寅彦の「レーリー卿」の最後に、次のような文章がある。

「冒頭に掲げた写真は一九〇一年五十九歳のときのである。マクスウェルとケルヴィンとレーリーとこの三人の写真を比べて見ると面白い。マクスウェルのには理智が輝いており、ケルヴィンのには強い意志が睨（にら）んでおり、レーリーのには温情と軽いユーモアーが見えるような気がする。これは自分だけの感じかもしれない。」

寺田論文の冒頭の写真はレーリーだけなので、マクスウェルとケルヴィンの写真をウィキペディアから借用して、3 人を比べてみよう。文学者の直感によるところも大きい様な気がするが、それぞれの伝記などを見ると、寅彦の指摘は正しいように思われる。

レーリー（1842～1919）

マクスウェル（1831～1879）



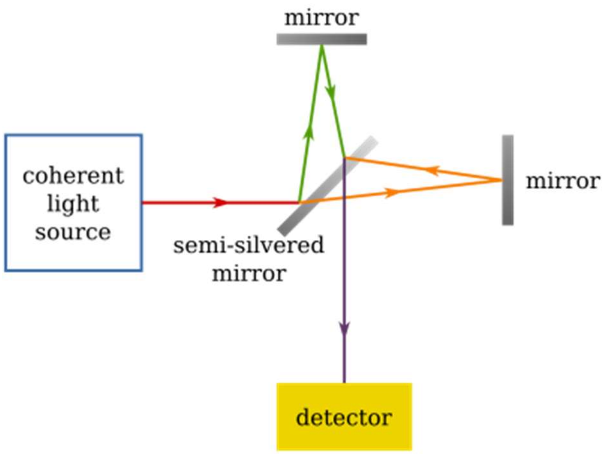
ケルヴィン（1824～1907）

同じ 19 世紀に、いわゆる古典的な動力学や電磁気学の根底を覆すような実験が行われた。1881 年から 1887 年まで繰り返し行われたマイケルソン・モーリーの実験である。

当時、光の伝播は空間を満たしているエーテル（aether(ether), light-bearing aether）によると考えらえられていた。エーテルは、アリストテレスが四元素（火、空気、水、土）の拡張として、天空の上方にあって天体を構成すると考えた第 5 の物質に由来する。

アメリカの物理学者で海軍士官でもあったアルバート・マイケルソン（1852～1931）は、エーテルの存在を証明するため、半透過のハーフミラーを使ってできる限り精密な実験を行った（1887）。実験は、

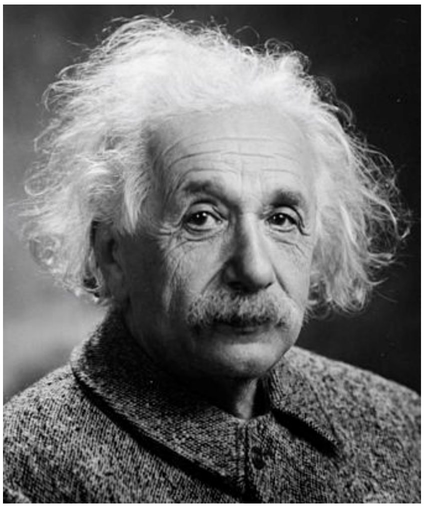
光速度と地球の移動速度の差による光の干渉縞の原理を利用したもので、光の移動長さは折り返しで11m に及び、実験装置は大理石の台に載せ、水銀の上に浮かべて、振動を極力抑えたという。



マイケルソン・モーリーの実験　　　　　　マイケルソン（1852～1931）

その結果は期待とは逆に、光の速度はどんな系でも不変という結論を支持するものであった。その意味で実験は失敗であった。

オランダの物理学者ヘンドリック・ローレンツ（Hendrik Antoon Lorentz、1853～1928）は、マイケルソン・モーリーの実験を解釈するため、物体が移動する方向に沿って収縮するというローレンツ収縮（1895 年）や、座標系の変換に伴う局所時間の理論を提案した（1899 年）。ローレンツは 1902 年にノーベル物理学賞を、また、マイケルソンは 1907 年にノーベル物理学賞を受賞している。



アインシュタイン（1904、25 歳）　アインシュタイン（1947、68 歳）

そして、アルベルト・アインシュタイン（Albert Einstein、1879～1955）により、1905 年に光速度不変の原理に基づく特殊相対性理論が発表され、力学と電磁気学は新しい次元に入った。アインシュタインはドイツ生まれで、チューリッヒ連邦工科大学で学び、1901 年にスイス国籍を取得、1902 年から特許局に務め、自由な立場で物理学の研究を行った。

1905 年には、26 歳で特殊相対性理論、光量子、ブラウン運動などについての 5 編の論文を提出し、

「奇跡の年」と呼ばれる。アインシュタインは 1921 年に相対性理論ではなく光電効果の発見でノーベル賞を受賞したが、保留となり、1922 年に授与された。相対性理論の価値に対する疑問の声や、ユダヤ人への偏見もその理由であったと言われる。この年にアインシュタインはフランスと日本を訪問、日本には 11 月 17 日～12 月 29 日まで 43 日間滞在、東京（2 回）、仙台、名古屋、京都、大阪、神戸、福岡で 8 回の講演を行い、14,000 名ほどの聴衆を集め、大変な評判になった。講演の通訳は、東北帝大元教授で、助教授時代にアインシュタインのもとに留学した石原純が務めた（仙台での通訳は愛知敬一東北大教授）。

レーリーやケルヴィンなど古典物理学の大家達は、相対性理論に対して非常に批判的であったという。新しいものへの抵抗はいつの世にもあるのだろう。チャールス・ダーウィン（Charles Robert Darwin、1809～1882）の「種の起源」の著書が出たのは 1859 年だが、進化論もなかなか社会には受け入れられなかった。レーリーは、ケンブリッジのトリニティカレッジで進化論のダーウィンの二男のジョージ・ダーウィン（1894～1912、天文・数学者）と同級であり、後にチャールス・ダーウィンとも交流があったとのことである。

1906 年サンフランシスコ地震でスタンフォード大学は大きな被害を受けたが、その際のアガシ教授像の有名な転落写真は、ホームページ "Stanford and the 1906 Earthquake" で見ることができる。ルイ・アガシ（1807～1873）はハーバード大学の生物学教授で、進化論の強力な反対者だった。新しい考え方が社会に受け入れられるようになるには、長い時間が必要である。

地震工学のような分野は、光や電磁波とは桁違いに遅い速度の世界であり、相対性理論や量子力学（エルヴィン・シュレーディンガー（1887～1961）、シュレーディンガー波動方程式 1926 年）を考える必要はない。しかし、、地震の発生・伝播の場や工学振動の場は、宇宙や素粒子の場とは桁違いに多様・複雑であり、別の困難がある。聞いた話だが、カーナビの位置決定をするとき、光速一定としないと大変な誤差が出てしまうとのことである。相対性理論が日常にも絡んでくる時代であろうか。

３．"Theory of Sound"（「音響論」）について

"Theory of Sound"の Vol. I （1877 年初版）及び Vol. II （1878 年初版）の目次（Contents）は次の様である。

Vol. 1

Vol. II
Chapter XI Aerial Vibrations（気体の振動）
Chapter XII Vibrations in Tubes（管内の振動）
Chapter XIII Special Problems, Reflection and Refraction of Plane Waves（平面波の反射と透過）
Chapter XIV General Equations（一般方程式）
Chapter XV Further Applications of General Equations（一般方程式の応用）
Chapter XVI Theory of Resonators（共鳴器の理論）
Chapter XVII Applications of Laplace's Functions（ラプラス関数の応用）
Chapter XVIII Spherical Sheets of Air, Motion in Two Dimensions（曲面の気体層、2 次元運動）
Chapter XIX Friction and Heat Conduction（摩擦と熱伝導）
Chapter XX Capillarity（毛細管振動）
Chapter XXI Vortex Motion and Sensitive Jets（渦運動と敏感な噴流）
Chapter XXII Vibrations of Solid Bodies（弾性体の振動）
Chapter XXIII Facts and Theories of Audition（聴覚の現象と理論）

レーリー「音響論」Vol. I の内容は、種々の振動現象の微分方程式による表現と、その解析が殆どである。当時すでにラグランジュの「解析力学」（1788 年）が発表され、ダランベールの個々の点での動的な力のつり合いによる運動方程式に代って、ラグランジュによる一般座標を用いた全体システムの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーによる運動方程式の導出法が提示されていた。しかし、レーリーの関心は天体運動などの遠い世界ではなく、絃、棒、板、曲面、空気、液体、電気など、身近な物の振動であり、解析力学的な取扱いは「音響論」ではあまり多くない。円板の振動などではベッセル関数が出てくる。ベッセル（Friedrich Wilhelm Bessel, 1784～1846）はドイツの天文学者・数学者で、ベッセル関数は、惑星軌道の時間変化に関するケプラーの方程式を解析的に解くためにベッセルが 1817 年に導入したものである。1824 年にはベッセル関数を詳しく整理した論文を発表している。ベッセルは、恒星の視差を用い、膨大なデータの分析に基づいてその星までの距離を初めて計算した（1838 年）ことで知られる。

また、Vol. Ⅱは、空気振動、液体の運動、共鳴器、渦運動、毛細管振動など、レーリーが興味を抱いた諸問題をなんでも取り上げて解析にのせている、といった印象である。地震動や地盤振動の基本方程式も、XXⅡ章の Vibration of Solid Bodies の項に出ている。それらに関する様々な実験は、レーリー個人の実験室で、実験助手あるいはレーリー自身の手作りの実験器具を使って行われた。

レーリーの後にも、様々な振動理論の本が出ている。例えば、ホレース・ラム（Horace Lamb, 1849～1934、英国の応用数学者、ケンブリッジ大卒）の"The Dynamical Theory of Sound"（初版 1910 年初版）は有名である[5)]。内容は教科書的で、分かり易く書かれている。扱っているテーマも限定的で、音響関係が多い。レーリーの本には図がほんの僅かしかないが、ラムの本では大分増えている。

また、ティモシェンコ（Stepan Timoshenko, 1878～1972）の "Vibration Problems in Engineering"（1928 年初版）は、我々の世代には最もなじみの深い振動の教科書であり、いまでも工学部の参考書として使われていると思う[6)]。

17 世紀のフック（1636～1703）、ニュートン（1642～1727、「プリンキピア」1687 年）、ライプニッツ（1646～1716、微分記号・積分記号）、18 世紀のオイラー（1707～1783）、ダランベール（1717～1783）、

ラグランジュ（1736～1813）を経て、様々な自然界の現象を科学的に解明するための力学と数学の体系が成立した。微分・積分、複素数、指数関数、フーリエ級数（ジョセフ・フーリエ（1768～1830））などを駆使して、音、振動、波、電磁波などの性質を数式で表せるようになり、実験結果と解析の照合を通じて、諸現象の理解が飛躍的に進んだのが、レーリー達の活躍した 19 世紀のヴィクトリア朝時代である。宗教と科学の相克もこの時代の大きな問題であった。

ガリレオ、コペルニクスから始まった真理探究の精神が、どんな経緯を経て発展し、現在の科学文明を作り上げたか、という壮大な文明史の一側面は興味の尽きない問題であり、多くの人の著書がある。山本義隆の「古典力学の形成　ニュートンからラグランジュへ」(1997)[7]には、古典力学の近代科学の形成における役割についての詳しい議論がある。ダランベールの原理の章には 30 頁を費している。(彼の「動力学論」(1743 年）は西欧で脚光を浴びたが、大変読みづらいとの定評。百科全書派。）また、大著「磁力と重力の発見」(全 3 巻、2003 年)[8]では、古代からニュートンの近代までの力の概念の発展を入念に辿っている。山本義隆は、1960 年代の学生運動の中心的存在であった。東大全共闘の議長だった彼は、1968～69 年の東大紛争後に大学を去り、科学史家として多くの著述を行った。又、駿台予備校の講師を長く務めている。なお、古典力学から現代物理学までの骨子を分かり易く述べた書物として、砂川重信（東北大教授、大阪大名誉教授）の「物理の考え方」(全 5 巻、力学、電磁気学、熱・統計力学、量子力学、相対性理論、岩波書店、1993 年)[12]を挙げておく。力学を学び直すのに最適の良書である。

４．音楽と数学

レーリーの本もラムの本も、最初の Introduction の中で、音楽と音響学との関係をまず取り上げ、特に音階のことを詳しく述べている。数学と音楽の関係は昔からのテーマであり、音楽の美しさの中に何か神の作った神秘－整合性－が存在するのではないか、という探究は、古代から行われた。ここでは、それらの内容について、若干の余分な説明も加えて紹介する。

音（note）は空気の振動であり、その**音高**（pitch）は、**振動数**（frequency）あるいは周期（period）で特徴づけられる。

ある 2 つの音の振動数が整数比で表される特別な音程を**協和的音程**（consonant interval）といい、次の種類がある。(**協和性**（consonance）: 2 つの音がきれいに溶け合って響く性質）（音階名は後で説明）

ユニゾン（Unison）	1；1
オクターブ（Octave）	1：2
完全 5 度（Fifth）	2：3
完全 4 度（Fourth）	3：4
長 3 度（Major Third）	4：5
短 6 度（Minor Sixth）	5：8
短 3 度（Minor Third）	5：6
長 6 度（Major Sixth）	3：5

様々な音高を持つ音が、一定の音程に従って並べられたものを**音階**（scale）といい、これが音楽の基本になる。いま、ある音を**主音**（tonic）とし、これをド（Do）と名付ける。

主音ドからオクターブ上の音、即ち振動数 1 : 2 の音を同じ名前のドとする。

ドから完全 5 度上の音をソ（Sol）、ドから長 3 度上の音をミ（Mi）とする。ド：ミ：ソの振動数比は

4 : 5 : 6 となる。ドを 1 とすると、ド：ミ：ソは 1 : 5/4 : 3/2 となる。

次に、ドから完全 4 度上の音をファ（Fa）,ドから長 6 度上の音をラ（La）とする。ド：ファ：ラの振動数比は 3 : 4 : 5 になる。ドを 1 とすると、ド：ファ：ラは 1 : 4/3 : 5/3 である。なお、ファ：ラ：ド（高い方）の振動数比は 4 : 5 : 6 になる。

次に、先に定めたソを基準にして、ソとシの振動数比が 4 : 5、ソとレの振動数比が 4 : 6、即ちソ：シ：レの振動数比が 4 : 5 : 6 となるように、シ（Si）とレ（Re）の音を定める。ドとソの振動数比は 2 : 3 であるから、ドを 1 とすれば、ソ：シ：レの振動数比は 3/2 : 15/8 : 9/4 となる。この場合のレは 2 以上でオクターブの外になるので、1 オクターブ下げて、ド：レの振動数比を 9/8 とする。この時、レ：ソ：シの振動数比は 3 : 4 : 5 になる。なお、ソ：シ：レ（高い方）の振動数比は 4 : 5 : 6 になる。

以上のようにして定めたドレミファソラシドの音階の振動数比は、ドを 1 とすれば次のようになる。

ド：レ：ミ：ファ：ソ：ラ：シ：ド＝1 : 9/8 : 5/4 : 4/3 : 3/2 : 5/3 : 15/8 : 2

ドレミファソラシド（do, re, mi, fa, sol, la, si, do）は階名（solfa）といい、主音ドに対する相対的な音の高さを表している。

長 3 度と短 3 度を組み合せた 3 つの音の連なりは、振動数比が 4 : 5 : 6 で、長 3 和音（major triad)と呼ばれ、最も協和的な和音である。主和音（tonic chord, ド、ミ、ソ)、下属和音（subdominant chord, ファ、ラ、ド（高))、属和音（dominant chord, ソ、シ、レ（高))のいずれも振動数比は 4 : 5 : 6 となる。なお、(ド、ファ、ラ）の振動数比は 3 : 4 : 5、(シ（低)、レ、ソ）は 5 : 6 : 8 となる（転回形)。

上記の様な振動数比の音階は、純正律（just intonation）と呼ばれる。1482 年バルトロメ・ラモスが定めたとされ、15 世紀のルネッサンス音楽の時代から用いられた。

ドから始まる音階を、全音階（diatonic scale）の中の長音階（major scale）という。また、ラから始まる音階を全音階の中の短音階（minor scale）という。

例：　100Hz　　　150Hz　　　200Hz

　　ド　　　　　ソ　　　　　ド（高い方）

1 : 2 （オクターブ）

2 : 3 （完全 5 度）

3 : 4 （完全 4 度、完全 5 度の転回形）

先の純正律のドレミファソラシドの音階で、ドに対する振動数比ではなく、隣の音に対する比率を取ってみると次の第 2 列のようになる。

基音（ド）に対する比		直下の音に対する比　（大全音、小全音、半音の 3 種類。)	
ド	1(1.000)	ド	
レ	9/8(1.125)	レ	9/8(1.125)
ミ	5/4(1.250)	ミ	10/9(1.111)
ファ	4/3(1.333)	ファ	16/15(1.067)
ソ	3/2(1.500)	ソ	9/8(1.125)
ラ	5/3(1.667)	ラ	10/9(1.111)
シ	15/8(1.875)	シ	9/8(1.125)
ド	2(2.000)	ド	16/15(1.067)
（レ	9/4(2.250))	（レ	9/8(1.125))

これを見ると、純正律では、隣り合う音の比が 3 種類あり、自由な転調が出来ない。

そこでミーファとシードの間を半音、それ以外を全音で半音 2 つ分と考え、全部で 12 の均等比率の音階を考える。これを**平均律**（equal temperament）という。音階を等比数列で表し、公比を r とし、半音の隔たりを r、全音の隔たりを r^2 とする。r^{12} が 1 オクターブで振動数 2 倍になるから、

$$r^{12}=2,\quad \therefore r=2^{1/12}=1.059,\quad r^2=2^{2/12}=1.122$$

$$(a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5,\ ,\ ,\ ar^{11},\ ar^{12}=2a)$$

となる。これは、純正律の間隔とほぼ近い。

平均律（長調）の場合

基音（ド）に対する比		直下の音に対する比（2 種類のみ、全音と半音）	
ド	1(1.000)	ド	
レ	$2^{2/12}$(1.122)	レ	$2^{2/12}$(1.122)
ミ	$2^{4/12}$(1.260)	ミ	$2^{2/12}$(1.122)
ファ	$2^{5/12}$(1.335)	ファ	$2^{1/12}$(1.059)
ソ	$2^{7/12}$(1.498)	ソ	$2^{2/12}$(1.122)
ラ	$2^{9/12}$(1.682)	ラ	$2^{2/12}$(1.122)
シ	$2^{11/12}$(1.888)	シ	$2^{2/12}$(1.122)
ド	2(2.000)	ド	$2^{1/12}$(1.059)
（レ	2^{14}(2.244))	（レ	$2^{2/12}$(1.122))

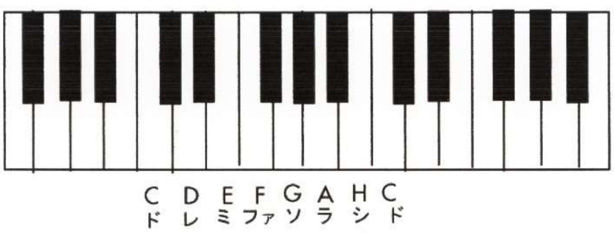
平均律は 16～17 世紀から始まり、ショパン、メンデルスゾーン等により良く用いられた。

純正律は主、下属、属和音がいずれも整数比 4：5：6 で、良く合う。しかし、平均律の 3 和音はほぼ合うけれども、完全ではない。

純正律に比べて平均律では、完全 4 度音程（ド～ファ、ラ～レ）は 0.2%高く、完全 5 度音程（ド～ソ、ラ～ミ）は 0.2%低い。長 3 度音程（ド～ミ）は 1%高く、短 3 度音程（ラ～ド）が 1%低い。（人が音の高さの違いを聞き分けられる限界が 0.2%位）したがって、平均律は純正律に比べて、少し和音がにごる。

平均律では自由に転調が出来る。ピアノを平均律の均等な 12 音で作れば、ドレミファソラシドの音階はどの音からでも始められる。始めの主音をどれにするかで、音階の調が決まる。ハ長調やイ短調（自然的音階）では、ピアノの白鍵だけで音階が弾けるが、他の調では全音の間の半音の黒鍵が必要になる。

音階は相対的なものであるが、音の絶対的な高さは**音名**（pitch name）と呼ばれる。
日本ではハ二ホヘトイロハ、英語では CDEFABC で表す。1 オクターブ異なる音は、同じ音名とする。
現在では、ピアノの真中の A 音(イ音、A4)が **440Hz**（ヘルツ、振動数／毎秒）と定められている（1939 年国際会議.)。真中のハ調のドは 523.3Hz である。



（参考，

ピタゴラス(BC582-496) によるという伝説のある**ピタゴラス音律**（Pythagorean tuning）は、5～11 世紀の中世のグレゴリオ聖歌などで用いられた。

ピタゴラス音律では、振動数比 2：3 を基本に、ドレミファソラシドを決める。ドを 1 とすると、
ド：ソ＝2：3（完全 5 度(上方)）　ソが決まる→3/2
ド：ド（高い方）＝1：2（完全 8 度、オクターブ）高いドは振動数 2 倍と決める
ソ：ド（高い方）＝3：4　ソと高いドの振動数比は 3：4 になる（完全 4 度）
次にファ、レ、ラ、ミ、シを決める。（完全 5 度と完全 4 度を使う。）
ファ：ド（高い方）＝2：3（完全 5 度（下方））ファが決まる　2*2/3=4/3=1.333（これだけ特別）
レ：ソ＝3：4（完全 4 度）　レが決まる　3/2*3/4=9/8（ソから完全 5 度上方⇀下に折返してレ）
レ：ラ＝2：3（完全 5 度上方）　ラが決まる　9/8*3/2＝27/16
ミ：ラ＝3：4（完全 4 度）　ミが決まる　27/16*3/4=81/64（ラから完全 5 度上方⇀下に折返してミ）
ミ：シ＝2：3（完全 5 度上方）　シが決まる　81/64*3/2=243/128（同様にファ 729/512=1.4238⇀4/3）
ピタゴラス音律の振動数比

基音（ド）に対する比		直下の音に対する比　（全音と半音の 2 種類）	
ド	1(1.000)	ド	
レ	9/8(1.125)	レ	9/8(1.125)
ミ	81/64(1.266)	ミ	9/8(1.125)
ファ	4/3(1.333)	ファ	256/243(1.053)
ソ	3/2(1.500)	ソ	9/8(1.125)
ラ	27/16(1.688)	ラ	9/8(1.125)
シ	243/128(1.898)	シ	9/8(1.125)
ド	2(2.000)	ド	256/243(1.053)
（レ	9/4(2.250)）	（レ	9/8(1.125)）

ピタゴラス音律はドーミがにごる。3 和音は整数比にならない。どこかでの和音で、不愉快なうなり（wolf interval）が生ずる。$(3/2)^n \neq 2^n$ であることから、音階をつくるのにやや無理をしている。

5．レーリー波

レーリー波（表面波）は弾性体の主に表層部分を伝播する波の一形態で、1885 年にレーリーがロンドン数学会（1865 年設立）に発表した論文 "On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid"で初めて論じられた[9]。地震に関係する勉強をした人なら一度は聞いたことがある現象で、多くの教科書にも載っているが、丁寧に説明したものはあまり多くない様だ。地震以外にも弾性表面波フィルターなどの応用例がある（SAW、非破壊検査）[3]。ここでは、直接に原論文の大筋を辿ってみることにしよう。ただし、記号は現在よく使われているものに書き換え、省略の部分は補ったりして、分かり易いようにした。論文の式は全部入れ、式番号は原論文そのままにした。途中、余分な説明や注釈を少し加えた。

まず、等方弾性地盤の運動方程式の変位による表現は

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=(\lambda+\mu)\frac{\partial\delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=(\lambda+\mu)\frac{\partial\delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=(\lambda+\mu)\frac{\partial\delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ここに、δ＝膨張（発散 dilatation)、(u, v, w)＝変位、　λ、μ＝ラーメの定数

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{wv}{\partial z} \quad (2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

もし、変位がすべてe^{ipt} に比例するとすれば、

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial \delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho p^2 u = 0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho p^2 v = 0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho p^2 w = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

上の 3 式をそれぞれ x, y, z で偏微分して加え合わせると、

$$(\lambda+\mu)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\delta + \mu\nabla^2\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right\} + \rho p^2\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right\} = 0$$

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\delta + \rho p^2 \delta = 0$$

よって、δに関する支配方程式、

$$(\nabla^2 + h^2)\delta = 0 \quad (4)$$

を得る。ここに、

$$h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\left(= \frac{p^2}{V_p{}^2}\right) \quad (5), \quad \left(h = \frac{p}{V_p}, \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\right)$$ （Vp＝縦波速度）

さらに、

$$k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu}\left(= \frac{p^2}{V_s{}^2}\right) \quad (6), \quad \left(k = \frac{p}{V_s}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)$$ （Vs＝横波速度）

とおけば、(3) の 3 つの運動方程式は、次のように書ける。

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial \delta}{\partial x} + \mu(\nabla^2 + k^2)u = 0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \delta}{\partial y} + \mu(\nabla^2 + k^2)v = 0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \delta}{\partial z} + \mu(\nabla^2 + k^2)w = 0 \end{aligned}\right\}$$

ここで、

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu}=\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}-1=\frac{(\lambda+2\mu)/\rho p^2}{\mu/\rho p^2}-1=\frac{k^2}{h^2}-1$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}(\nabla^2+k^2)u&=\left(1-\frac{k^2}{h^2}\right)\frac{\partial\delta}{\partial x}\\(\nabla^2+k^2)v&=\left(1-\frac{k^2}{h^2}\right)\frac{\partial\delta}{\partial y}\\(\nabla^2+k^2)w&=\left(1-\frac{k^2}{h^2}\right)\frac{\partial\delta}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

上式の特解（particular solution）は次のように表される。

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{1}{h^2}\frac{\partial\delta}{\partial x}\\v&=-\frac{1}{h^2}\frac{\partial\delta}{\partial y}\\w&=-\frac{1}{h^2}\frac{\partial\delta}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

上式が特解であることは代入により確かめられる。例えば、第 1 式の右辺は、δ の支配方程式である（4）式$(\nabla^2+h^2)\delta=0$ を考慮すれば、次のように左辺に一致する。

$$(\nabla^2+k^2)\left(-\frac{1}{h^2}\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)=-\frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\delta-\frac{k^2}{h^2}\frac{\partial\delta}{\partial x}=\frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial x}h^2\delta-\frac{k^2}{h^2}\frac{\partial\delta}{\partial x}=\left(1-\frac{k^2}{h^2}\right)\frac{\partial\delta}{\partial x}$$

また、特解の他に、次のような余解（complimentary term）を考える。(δ＝0 の時の解)

$$\left.\begin{aligned}(\nabla^2+k^2)u&=0\\(\nabla^2+k^2)v&=0\\(\nabla^2+k^2)w&=0\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

ここに

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\quad(10)\quad(\delta=0)$$

（8）式の特解は dilatational wave、（9）式と（19）式を満足する解は rotational wave に相当する。（10）式が δ＝0 の条件、即ち回転波の条件である。

いま、自由表面を $z=0$ とする。

特解において、変位が e^{ifx}, e^{igy} に比例すると考え、

$$\delta = Ce^{ifx}e^{igy}w(z)$$

とおけば、(4) 式から

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + h^2 - f^2 - g^2\right)\delta = 0$$

よって

$$\delta = Pe^{-rz} + Qe^{rz} \quad (11)$$
$$r^2 = f^2 + g^2 - h^2 \quad (12)$$

ここで、r は実数で正と仮定する。δが深さ∞で 0 となる様に Q=0 とし、P=1 として

$$\delta = e^{ifx}e^{igy}e^{-rz} \quad (13)$$

特解に対する変位は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{if}{h^2}e^{ifx}e^{igy}e^{-rz} \\ v &= -\frac{ig}{h^2}e^{ifx}e^{igy}e^{-rz} \\ w &= \frac{r}{h^2}e^{ifx}e^{igy}e^{-rz} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

また、余解については、e^{ifx}, e^{igy} の項が含まれることを考慮すれば、

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - f^2 - g^2\right)u = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - f^2 - g^2\right)v = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - f^2 - g^2\right)w = 0 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

よって、余関数の変位解は、ｚ＝∞での条件を考慮して、

$$u = Ae^{ifx}e^{igy}e^{-sz},\ v = Be^{ifx}e^{igy}e^{-sz},\ w = Ce^{ifx}e^{igy}e^{-sz} \quad (16)$$
$$s^2 = f^2 + g^2 - h^2 \quad (17)$$

dilatation が 0 の条件 (10) 式から、

$$ifA + igB - sC = 0 \quad (18)$$

一般解は特解と余解の和として次のように表せる。

$$\left.\begin{aligned}
u &= \left(-\frac{if}{h^2}e^{-rz} + Ae^{-sz}\right)e^{ifx}e^{igy} \\
v &= \left(-\frac{ig}{h^2}e^{-rz} + Be^{-sz}\right)e^{ifx}e^{igy} \\
w &= \left(\frac{r}{h^2}e^{-rz} + Ce^{-sz}\right)e^{ifx}e^{igy}
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

A, B, C の間には膨張が 0 の条件が付く。(k, h, f, g, r, s はラーメの定数λ、μと円振動数 p の関数)

次に、自由表面の境界条件を考える。

フックの法則から、せん断応力－歪関係は次のように表される。λ、μはラーメの定数。

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

地表面 z=0 での接線応力 τ_{yz}, τ_{zx} が 0 であることから、

$$sB = \frac{2igr}{h^2} + igC,\ sA = \frac{2ifr}{h^2} + ifC \quad (20)$$

(20) 式を (18) 式に代入すれば、次式を得る。

$$C(s^2 + f^2 + g^2)h^2 + 2r(f^2 + g^2) = 0 \quad (21)$$

また、地表面 z=0 での直応力 σ_z も 0 でなければならない。直応力の表現は、

$$\sigma_z = \lambda\delta + 2\mu\varepsilon_z = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

λをμ、h、k で表せば、直応力は次のように表せる。

$$\lambda = \left(\frac{k^2}{h^2} - 2\right)\mu$$

$$\sigma_z = \mu\left\{\left(\frac{k^2}{h^2} - 2\right)\delta + 2\frac{\partial w}{\partial z}\right\}$$

膨張δ＝0 の条件式である (18) 式、

$$ifA + igB - sC = 0$$

を用い、(19) 式の u, v, w をσz の式に代入して整理すれば、σz＝0 の条件は次の様になる。

$$\frac{k^2}{h^2}\left\{\frac{f^2}{h^2} + \frac{g^2}{h^2} - \frac{r^2}{h^2}\right\} - 2\left\{\frac{f^2}{h^2} + \frac{g^2}{h^2} + sC\right\} = 0$$

r^2 の定義の（12）式

$$r^2 = f^2 + g^2 - h^2$$

を用いれば、

$$k^2 - 2(f^2 + g^2) - 2sCh^2 = 0 \quad (22)$$

地表における接線応力と直応力の条件式から C を消去すれば、

$$\left\{k^2 - 2(f^2 + g^2)\right\}\left\{s^2 + f^2 + g^2\right\} + 4rs(f^2 + g^2) = 0$$

定義式

$$s^2 = f^2 + g^2 - k^2$$

を用いれば、

$$\left\{2(f^2 + g^2) - k^2\right\}^2 = 4rs(f^2 + g^2) \quad (23)$$

上式を 2 乗して、r^2 と s^2 の定義、（12）式と（17）式を考慮すれば、

$$\left\{2(f^2 + g^2) - k^2\right\}^4 = 16(f^2 + g^2)^2(f^2 + g^2 - h^2)(f^2 + g^2 - k^2)$$

上式で、f と g は$(f^2 + g^2)$ の形でのみ表れ、また h^2 と k^2 に関して同次の量であるので、

ここでは$(f^2 + g^2)$ を 1 とおいても良い。よって

$$k^8 - 8k^6 + 24k^4 - 16k^2 - 16h^2k^2 + 16h^2 = 0 \quad (24)$$

ここで、$h^2 : k^2$ の比率はわかっているので、上式は 3 次方程式となり、それぞれの値が定まる。

もし、弾性体が非圧縮性（ポアソン比 σ ＝0.5、 λ ＝∞、力をかけても体積が変わらない性質、ゴム・水・空気などはこれに近い）なら、$h^2=0$ となり、次の 3 次方程式が得られる。

$$k^6 - 8k^4 + 24k^2 - 16 = 0 \quad (25)$$

上式の実根は 0.91275 と求められ、方程式は次のようになる。

$$(k^2 - 0.91275)(k^4 - 7.08725k^2 + 17.5311) = 0$$

上式の虚根はどのように考えたらよいか。結論として虚根は用いないことにする。

前の k^2 に関する方程式から、

$$(2 - k^2)^2 = 4rs$$

非圧縮性、即ち r=1 の場合は、

$$(2 - k^2)^2 = 4s$$

s の符号は自由に選ぶことは出来ない。k² の虚根は 3.5436∓2.2301i となるので、

$$4s = -2.7431 \pm 6.8846i$$

従って、s の実部は r と逆符号になり、e^{-rz}, e^{-sz} は無限遠で同時に 0 になることは出来ない。よって、非圧縮性の場合、複素根は除いて、k² は次の実根のみになる。

$$k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} = 0.91275(f^2 + g^2) \quad (26)$$

一般解の中の A, B, C が定まり、解は次のようになる。(*f*→*if*)

$$h^2 u = if\left\{-e^{-rz} + \frac{2rz}{s^2 + f^2 + g^2}e^{-sz}\right\}e^{ifx}e^{igy} \quad (27)$$

$$h^2 v = ig\left\{-e^{-rz} + \frac{2rz}{s^2 + f^2 + g^2}e^{-sz}\right\}e^{ifx}e^{igy} \quad (28)$$

$$h^2 w = r\left\{e^{-rz} - \frac{2(f^2 + g^2)}{s^2 + f^2 + g^2}e^{-sz}\right\}e^{ifx}e^{igy} \quad (29)$$

非圧縮性の場合には、求められた k² の値を用い、

$$r^2 = f^2 + g^2,\ s^2 = 0.08725(f^2 + g^2)$$

従って、

$$\left.\begin{aligned} h^2 u &= if\left\{-e^{-rz} + 0.5433e^{-sz}\right\}e^{ipt}e^{ifx}e^{igy} \\ h^2 v &= ig\left\{-e^{-rz} + 0.5433e^{-sz}\right\}e^{ipt}e^{ifx}e^{igy} \\ h^2 w &= \sqrt{f^2 + g^2}\left\{e^{-rz} - 1.840e^{-sz}\right\}e^{ipt}e^{ifx}e^{igy} \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

もし、運動が 2 次元的なら、g=0 であり、従って v=0、解は、

$$\left.\begin{aligned} h^2 u / f &= i\left\{-e^{-fz} + 0.5433e^{-sz}\right\}e^{ipt}e^{ifx} \\ h^2 w / f &= i\left\{e^{-fz} - 1.840e^{-sz}\right\}e^{ipt}e^{ifx} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

ここに、

$$k = 0.9554f,\ s = 0.2954f \quad (32)$$

進行波は（31）式の実部をとれば、次の様になる（(pt+fx）は負方向へ進行する波)。

$$\left.\begin{aligned} h^2 u / f &= (e^{-fz} - 0.5433e^{-sz})\sin(pt + fx) \\ h^2 w / f &= (e^{-fz} - 1.840e^{-sz})\cos(pt + fx) \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

波（レーリー波）の伝播速度は p / f 、即ち $0.9554\sqrt{\mu / \rho}$ である。ここに、$\sqrt{\mu / \rho}$ は純粋な横波速

度 Vs である。表面波は横波よりやや遅い。$(\sin(pt + fx) = \sin p(t + (f / p)x) = \sin p(t + x / V))$
前式から、u は、$e^{(s-f)z} = 0.5433$、すなわち $fz = 0.8659$ の時、常に 0 となることが分る。((32)式)
従って、λ'を波長 $(2\pi / f)$ とすれば、水平動は 0.1378λ'の深さで 0 になる。しかし、上下動は特定の深さで 0 になることは無い。

地表における波形は、解で z=0 とおけば得られる。

$$\left.\begin{aligned} h^2u / f &= 0.4567\sin(pt + fx) \\ h^2w / f &= -0.840\cos(pt + fx) \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

上式から、地表の動きは楕円を画き、その鉛直軸は水平軸のほぼ 2 倍であることが分る。

定常振動状態の解は、非圧縮性の場合の一般解において p, f, g の符号を考慮し、次のように表される。定数を無視して、

$$\left.\begin{aligned} u &= -f\left\{-e^{rz} + 0.5433e^{-sz}\right\}\cos pt \sin fx \cos gy \\ v &= -g\left\{-e^{rz} + 0.5433e^{-sz}\right\}\cos pt \cos fx \sin gy \\ w &= r\left\{e^{rz} - 1.840e^{-sz}\right\}\cos pt \cos fx \cos gy \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

ここに、

$$r = \sqrt{f^2 + g^2},\ s = 0.2954\sqrt{f^2 + g^2} \quad (36)$$

前と同様に、水平動は下記の深さで常に 0 になる。

$$\sqrt{f^2 + g^2}\ z = 0.8659$$

次に、圧縮性を有する場合に、結果がどのように異なるかを、数値的に調べてみる。
通常、圧縮性は軸方向の伸びに対する横方向の縮みの比率、ポアソン比 σ で表され、多くの場合 1/4 と仮定されるが、実際にはこれと異なる場合も多い。（λ／μ＝2σ／（1−2σ）の関係がある。）理論的には σ は−1 から 0.5 の値を取りうるが、−1 の場合は極めて稀である。
下の表は、$k^2/(f^2+g^2)$の値が、λ/μ あるいはポアソン比 σ によってどのように変化するかを示したものである。

λ	σ	h^2/k^2	$k^2/(f^2+g^2)$	$k/\mathrm{sqrt}(f^2+g^2)$
∞	1/2	0	0.9127	0.9554
μ	1/4	1/3	0.8453	0.9194
0	0	1/2	0.7640	0.8741
−(2/3)μ	−1	5/4	0.4746	0.6896

圧縮性物体の例として、表の 2 列目（σ＝1/4、λ＝μ）の場合を考えよう。
r と s の定義、（12）式と（17）式から、

$$r^2 = 0.7182(f^2+g^2),\quad r = 0.8475\sqrt{f^2+g^2}$$
$$s^2 = 0.1547(f^2+g^2),\quad s = 0.3933\sqrt{f^2+g^2}$$

よって、(27)、(28)、(29) 式と (30) 式から解は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} h^2u &= if\left\{-e^{-rz}+0.5773e^{-sz}\right\}e^{ipt}e^{ifx}e^{igy} \\ h^2v &= ig\left\{-e^{-rz}+0.5773e^{-sz}\right\}e^{ipt}e^{ifx}e^{igy} \\ h^2w &= 0.8475\sqrt{f^2+g^2}\left\{e^{-rz}-1.4679e^{-sz}\right\}e^{ipt}e^{ifx}e^{igy} \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

2 次元の場合について、進行波の形で表せば、

$$\left.\begin{aligned} h^2u/f &= (-e^{-rz}+0.5773e^{-sz})\sin(pt+fx) \\ h^2w/f &= (0.8475e^{-rz}-1.4679e^{-sz})\cos(pt+fx) \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

地表面では、

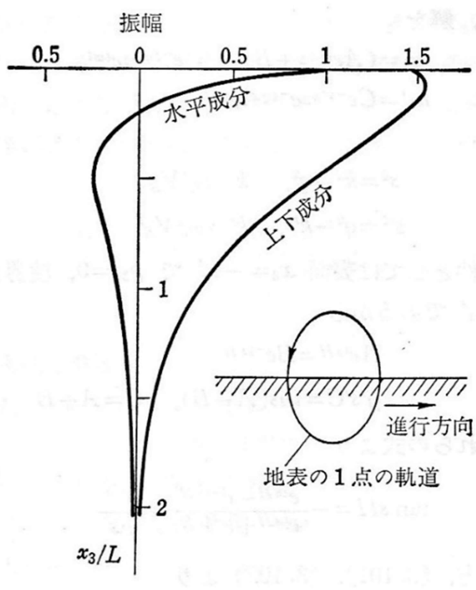
$$\left.\begin{aligned} h^2u/f &= 0.4227\sin(pt+fx) \\ h^2w/f &= -0.6204\cos(pt+fx) \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

前と同様に、楕円軌道の鉛直軸は、水平軸の約 2 倍（half→double）である。

「ここで述べた振動現象は、Lamb の弾性球体振動の論文の一般理論に含まれるものである。しかし、一般理論からこの論文の結果を導くことは、それを全く独立に導くことと同じ位に苦労だという事は、言ってもよいだろう。この論文で検討された表面波の問題が、地震や弾性体の衝突の問題において重要な役割を果たすようになることは、あり得ない話ではない。2 次元方向のみに広がってゆくので、表面波は波源から十分遠い所では次第に優勢になってゆくであろう。」(原文のまま)

（参考 1）

レーリーの原論文には図が一つもないので、宇津「地震学」(共立全書) 55 頁からレーリー波の振幅の図を引用する[10]。ポアソン比 σ＝1／4 の場合である。((38) 式の場合は、進行方向は負方向、この図は(pt－fx)の形で正の進行方向)



（参考 2）運動方程式の表現

今の表現法による弾性地盤の運動方程式（ナビエの方程式）を参考までに示しておく[11]。（アンリ・ナヴィエ（1785～1836）、エコール・ポリテクニク教授）

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\delta + \mu \nabla^2 U$$

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\delta - 2\mu\,\mathrm{curl}\,\omega$$

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,U - \mu\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,U$$

ここに、$U = \{u, v, w\}^T$

$$\mathrm{div}\,U = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \delta : dilatation$$

$$\mathrm{grad}\,\delta = \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x}, \frac{\partial \delta}{\partial y}, \frac{\partial \delta}{\partial z} \right\}^T$$

$$\mathrm{curl}\,U = \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right\}^T = 2\omega = 2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) : rotation \times 2$$

$$\nabla^2 U = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,U - \mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,U : formula$$

参考文献（この他、パワーポイントの方に追加の文献・資料があるので、参照されたい。）

１）Lord Rayleigh, J.W.S, The Theory of Sound, Vol. 1, 1877, Vol.2, 1878, Macmillan
２）寺田寅彦、「レーリー卿」、岩波講座「物理学及び化学」（物理学 12）、1930 年（昭和 5）、岩波書店（青空文庫　http://www.aozora.gr.jp/cards/000042/files/43083_23775.html）
３）Humphrey, A. T., Lord Rayleigh－the last of the great Victorian polymaths, GEC Review Volume 7, No. 3, page 167, The General Electric Company（英国の会社、米大手会社の GE とは別）, 1992
４）Wood R. M., Robert Mallet and John Milne – Earthquakes Incorporated in Victorian Britain, Earthquake Engineering and Structural Dynamics Vol.17, 107 – 148, 1988
５）Lamb, Horace, The Dynamical Theory of Sound, Edward Arnold, 1910
６）Timoshenko, Stepan, Vibration Problems in Engineering, D. Van Nostrand,1928
７）山本義隆、古典力学の形成　ニュートンからラグランジュへ、日本評論社、1997 年
８）山本義隆、磁力と重力の発見、全 3 巻、みすず書房、2003 年
９）Lord Rayleigh, On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 17, pages 4-11, 1885
（注：レーリー波の式の誘導（ポテンシャル関数による）：宇津[10]（53～55 頁）、また、Kolsky, H., Stress Waves in Solids, Dover, 1963 (Originally by Clarendon Press, 1953（16～23 頁）
１０）宇津徳治、地震学、共立全書、1977 年（昭和 52）
１１）理論地震動研究会、地震動　その合成と波形処理、鹿島出版会、1994 年
１２）砂川重信、物理の考え方、全 5 巻、岩波書店、1993 年

なお、出版後 50 年以上を経た名著の１）、５）、６）は、インターネットで pdf 版を容易に入手できる。また、２）、３）、９）もインターネットで入手できる。 柴田明徳メールアドレス akenori-shibata@nifty.com